

Esempio 5

$$y = e^{\frac{x^2}{x-1}}$$



1) Determinazione del campo di esistenza (C.E.)

$$C.E. = \{x \in \mathbb{R} : x - 1 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1\} = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < 1, 1 < x < +\infty\}$$



$$\begin{cases} x = 1 \\ y = e^{\frac{x^2}{x-1}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = e^{\frac{1}{0}} = e^{+\infty} = +\infty \end{cases}$$



$$x = 1 \text{ A.V.}$$

$$y = e^{\frac{x^2}{x-1}}$$



1) Studio del segno della funzione

$$y > 0 \Leftrightarrow e^{\frac{x^2}{x-1}} > 0$$



**l'esponenziale è
sempre positiva**

+++++

$$y > 0$$

$$y = e^{\frac{x^2}{x-1}}$$



1) Intersezioni con gli assi

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = e^{\frac{x^2}{x-1}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = e^{\frac{0}{-1}} = e^0 = 1 \end{cases} \Rightarrow A = (0,1) \quad \text{intersezione con l'asse } y$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ 0 = e^{\frac{x^2}{x-1}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \text{mai} \end{cases} \quad \text{non esistono intersezioni con l'asse } x$$

$$y = e^{\frac{x^2}{x-1}}$$



1) Limiti agli estremi del *C.E.*

$$C.E. = \{x \in \mathbb{R} : x - 1 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1\} = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < 1, 1 < x < +\infty\}$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^{\frac{x^2}{x-1}} \right) = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} \right)} = e^{+\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(e^{\frac{x^2}{x-1}} \right) = e^{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} \right)} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{+\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0 \quad \longrightarrow \quad y = 0 \text{ A.O. sinistro}$$

$$y = e^{\frac{x^2}{x-1}}$$



1) Calcolo della derivata prima

$$\begin{aligned} y' &= D \left[e^{\frac{x^2}{x-1}} \right] = e^{\frac{x^2}{x-1}} \cdot D \left(\frac{x^2}{x-1} \right) = e^{\frac{x^2}{x-1}} \cdot \left(\frac{(2x) \cdot (x-1) - (x^2) \cdot 1}{(x-1)^2} \right) = \\ &= e^{\frac{x^2}{x-1}} \cdot \left(\frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2} \right) = e^{\frac{x^2}{x-1}} \cdot \left(\frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} \right) \end{aligned}$$

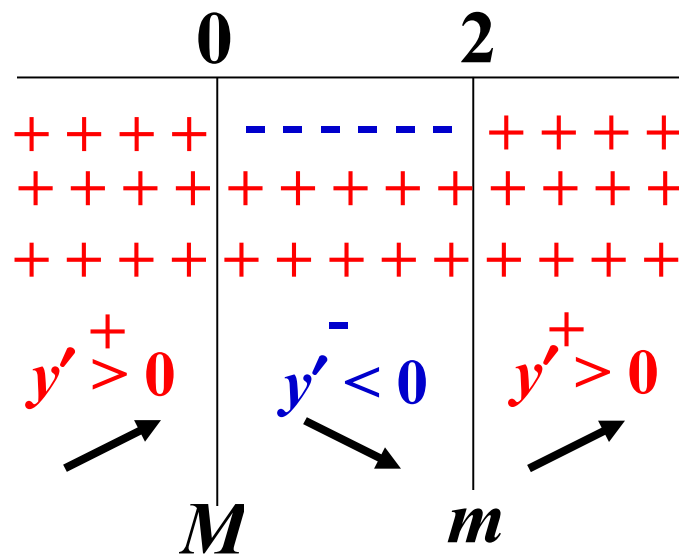
$$y = e^{\frac{x^2}{x-1}}$$



1) Studio del segno della derivata prima

$$y' > 0 \Leftrightarrow e^{\frac{x^2}{x-1}} \cdot \left(\frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} \right) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} > 0 \\ e^{\frac{x^2}{x-1}} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x > 0 \\ (x-1)^2 > 0 \\ \text{sempre (è un'esponenziale)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x-2) > 0 \\ \text{sempre (è un quadrato)} \\ \text{sempre (è un'esponenziale)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0, x > 2 \\ \text{sempre} \\ \text{sempre} \end{cases}$$



$$y = e^{\frac{x^2}{x-1}}$$



$x = 0$ è un *Massimo* per la funzione

$x = 2$ è un *minimo* per la funzione



$$x = 0 \Rightarrow y = 1$$

$$x = 2 \Rightarrow y = e^{\frac{(2)^2}{2-1}} \Rightarrow y = e^{\frac{4}{1}} = e^4 \approx 54,6$$



$$M = (0, 1) \equiv A$$

punto di Massimo

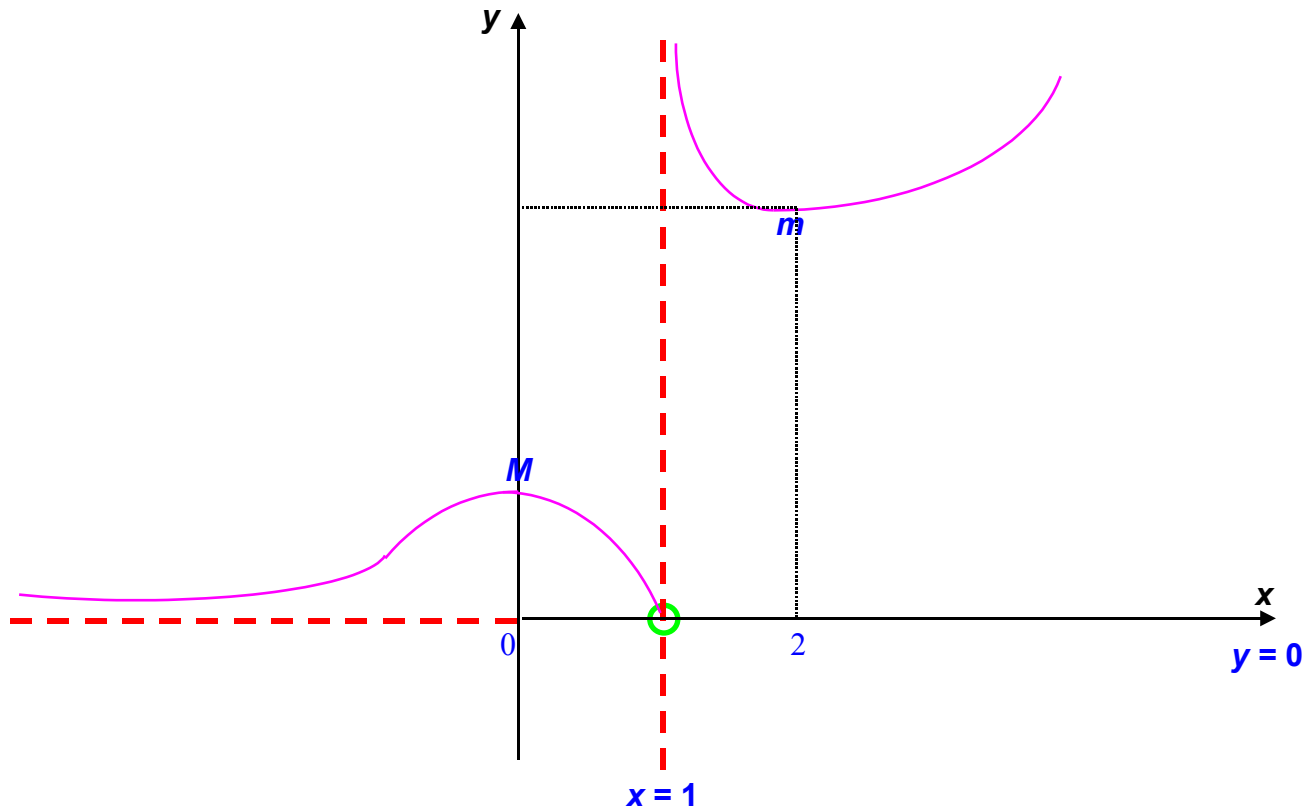
$$m = (2, e^4)$$

punto di minimo

$$y = e^{\frac{x^2}{x-1}}$$



1) Grafico della funzione



Esempio 6

$$y = x^2 e^{-x+2}$$



1) Determinazione del campo di esistenza (C.E.)

$$C.E. = \{ x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty \}$$

**Il polinomio x^2 è definito su tutta la retta reale
L'esponenziale è definita su tutta la retta reale**



La funzione data è definita su tutta la retta reale

$$y = x^2 e^{-x+2}$$



1) Studio del segno della funzione

$$y > 0 \Leftrightarrow x^2 e^{-x+2} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 > 0 \\ e^{-x+2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{sempre (è un quadrato)} \\ \text{sempre (è un'esponenziale)} \end{cases}$$



+++++

+++++

$$y > 0$$

$$y = x^2 e^{-x+2}$$



1) Intersezioni con gli assi

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = x^2 e^{-x+2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \cdot e^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow A = (0, 0) \equiv O \text{ intersezione con l'asse } y$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x^2 e^{-x+2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \begin{cases} x^2 = 0 \\ e^{-x+2} = 0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \begin{cases} x = 0 \\ \text{mai} \end{cases} \end{cases} \Rightarrow B = (0, 0) \equiv A \equiv O \text{ intersezione con l'asse } x$$

$$y = x^2 e^{-x+2}$$



1) Limiti agli estremi del *C.E.*

$$C.E. = \{ x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty \}$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 e^{-x+2}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2) e^{\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x+2)} = (+\infty)(+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 e^{-x+2}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2) e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x+2)} = (+\infty)(0) = f.i.$$



Osservazione

Per $x \rightarrow \pm \infty$ le esponenziali tendono a zero più velocemente di tutte le potenze che, a loro volta, tendono a zero più velocemente delle logaritmiche



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^2 e^{-x+2} \right) = 0$$



$y = 0$ A.O. destro

$$y = x^2 e^{-x+2}$$



1) Calcolo della derivata prima

$$D[f(x) \cdot g(x)] = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

regola di derivazione di un prodotto



$$\begin{aligned} y' &= D[x^2 e^{-x+2}] = D(x^2) \cdot e^{-x+2} + x^2 \cdot D(e^{-x+2}) = 2x \cdot e^{-x+2} + x^2 \cdot e^{-x+2} \cdot (-1) = \\ &= e^{-x+2} \cdot (2x - x^2) \end{aligned}$$

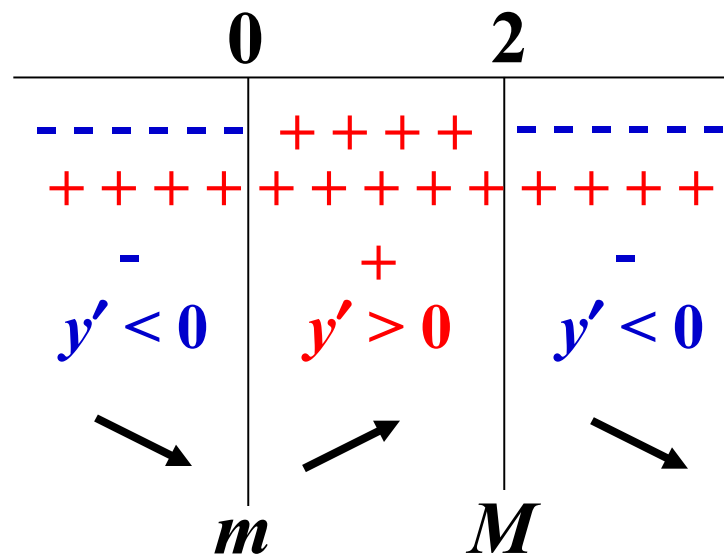
$$y = x^2 e^{-x+2}$$



1) Studio del segno della derivata prima

$$y' > 0 \Leftrightarrow e^{-x+2} \cdot (2x - x^2) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - x^2 > 0 \\ e^{-x+2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x < 0 \\ \text{sempre (è un'esponenziale)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x-2) < 0 \\ \text{sempre} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 2 \\ \text{sempre} \end{cases}$$



$$y = x^2 e^{-x+2}$$



$x = 0$ è un *minimo* per la funzione

$x = 2$ è un *Massimo* per la funzione



$$x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow m = (0,0) \equiv A \equiv O$$

$$x = 2 \Rightarrow y = 2^2 \cdot e^{-2+2} \Rightarrow y = 4 \cdot e^0 = 4 \cdot 1 = 4$$



$$M = (2,4)$$

punto di Massimo

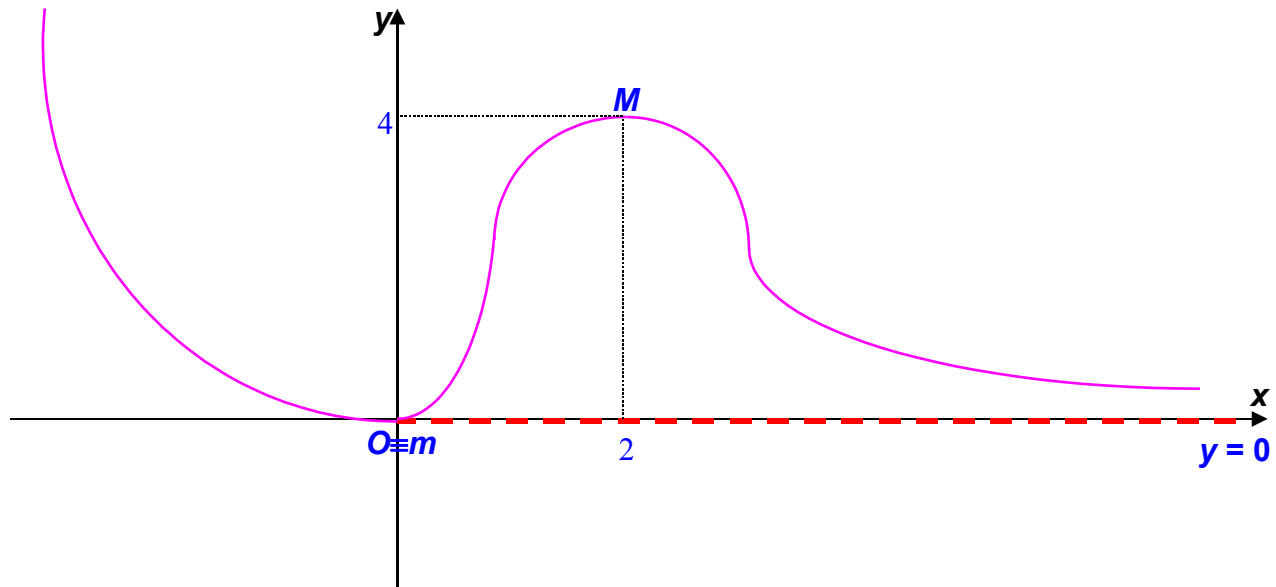
$$m = (0,0) \equiv O$$

punto di minimo

$$y = x^2 e^{-x+2}$$



1) Grafico della funzione



Esempio 7

$$y = \frac{x+1}{x} e^{-2x}$$



1) Determinazione del campo di esistenza (C.E.)

$$C.E. = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < 0, 0 < x < +\infty\}$$

L'esponenziale è definita su tutta la retta reale



$$x = 0 \text{ A.V.}$$

$$y = \frac{x+1}{x} e^{-2x}$$



1) Studio del segno della funzione

$$y > 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x} \cdot e^{-2x} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+1}{x} > 0 \\ e^{-2x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x+1 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \\ \text{sempre (è un'esponenziale)} \end{cases}$$

-1		0
-----	+++++	+++++
-----	-----	+++++
+++++	+++++	+++++
+	-	+
$y > 0$	$y < 0$	$y > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x > -1 \\ x > 0 \end{cases} \\ \text{sempre} \end{cases}$$

$$y = \frac{x+1}{x} e^{-2x}$$



1) Intersezioni con gli assi

**Non esistono intersezioni con l'asse y :
in $x = 0$, infatti, la funzione non è definita!!!**

$$\begin{cases} y = 0 \\ \frac{x+1}{x} e^{-2x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \frac{x+1}{x} = 0 \\ e^{-2x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x+1 = 0 \\ \text{mai} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = -1 \\ \text{mai} \end{cases} \Rightarrow A = (-1, 0)$$

intersezione con l'asse x

$$y = \frac{x+1}{x} e^{-2x}$$



1) Limiti agli estremi del *C.E.*

$$C.E. = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < 0, 0 < x < +\infty\}$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x+1}{x} e^{-2x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x+1}{x} \right) e^{\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x)} = (1) (e^{+\infty}) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x} e^{-2x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x} \right) e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x)} = (1) (e^{-\infty}) = \frac{1}{e^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

y = 0 A.O. destro

$$y = \frac{x+1}{x} e^{-2x}$$



1) Calcolo della derivata prima

$$\begin{aligned} y' &= D\left[\frac{x+1}{x} e^{-2x}\right] = D\left(\frac{x+1}{x}\right) \cdot e^{-2x} + \frac{x+1}{x} \cdot D(e^{-2x}) = \\ &= \frac{1 \cdot x - (x+1) \cdot 1}{x^2} e^{-2x} + \frac{x+1}{x} \cdot e^{-2x} \cdot (-2) = \\ &= \frac{x - x - 1}{x^2} e^{-2x} - \frac{2x+2}{x} e^{-2x} = e^{-2x} \left(\frac{-1}{x^2} - \frac{2x+2}{x} \right) \end{aligned}$$

$$y = \frac{x+1}{x} e^{-2x}$$



1) Studio del segno della derivata prima

$$y' > 0 \Leftrightarrow e^{-2x} \left(\frac{-1}{x^2} - \frac{2x+2}{x} \right) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-1-2x^2-2x}{x^2} > 0 \\ e^{-2x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

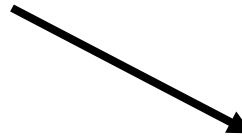
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 2x + 1 < 0 \\ \text{sempre (è un'esponenziale)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{mai } (\Delta < 0) \\ \text{sempre} \end{cases}$$



+ + + + + + + + + + + + + + +

-

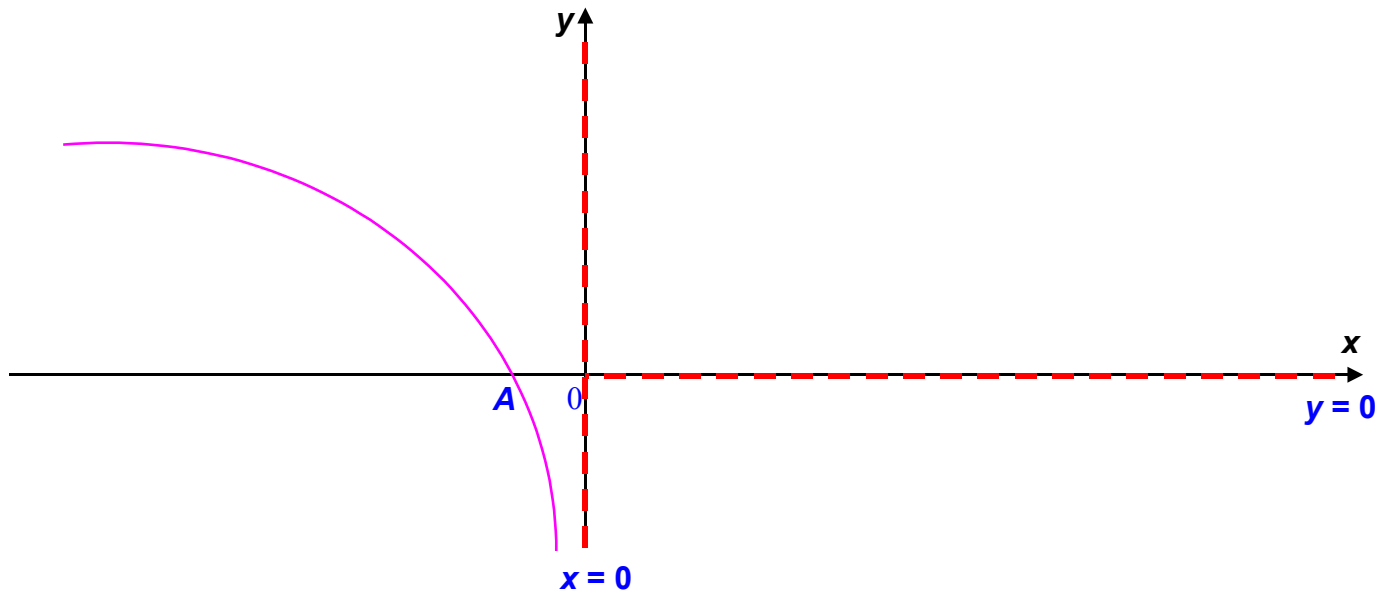
$$y' < 0$$



$$y = \frac{x+1}{x} e^{-2x}$$



1) Grafico della funzione



Osservazioni!

Le funzioni esponenziali sono definite su tutto $\mathbb{R}$

Le funzioni esponenziali sono sempre positive

**Le funzioni esponenziali non presentano
intersezioni con l'asse delle x**

$$0 < a < 1$$

$$x \rightarrow +\infty \Rightarrow y \rightarrow 0^+$$

$$x \rightarrow -\infty \Rightarrow y \rightarrow +\infty$$

$$a > 1$$

$$x \rightarrow +\infty \Rightarrow y \rightarrow +\infty$$

$$x \rightarrow -\infty \Rightarrow y \rightarrow 0^-$$